



ce
pre
UNI

Álgebra

TEMA FUNCIONES II

CICLO
PREUNIVERSITARIO

Admisión
2024-1



CONTENIDO

- **FUNCION PAR, FUNCION IMPAR**
- **FUNCIONES MONOTONAS**
- **FUNCION INYECTIVA**
- **FUNCION SOBREYECTIVA**
- **FUNCION BIYECTIVA**
- **FUNCIONES ACOTADAS**

FUNCIÓN PAR, FUNCIÓN IMPAR

Conjunto Simétrico

Definición: Un conjunto A , contenido en el conjunto de los números reales, se dice simétrico respecto de $x = 0$ cuando:

$$x \in A \rightarrow -x \in A$$

Ejemplo: El intervalo cerrado $[-5, 5]$ es simétrico respecto del punto $x = 0$. En general, cualquier intervalo de la forma $[-a, a]$ o $\langle -a, a \rangle$, con $a > 0$, es simétrico respecto de $x = 0$.

Ejemplo: El conjunto unitario $\{0\}$ es simétrico respecto del punto $x = 0$.

Ejemplo: El conjunto $A = [-6, 6] \setminus [-2, 2] = [-6; -2 > \cup < 2; 6]$ es simétrico respecto del punto $x = 0$.

FUNCIÓN PAR, FUNCIÓN IMPAR

Definición: Sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto simétrico respecto de $x = 0$.
Una función $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ se dice:

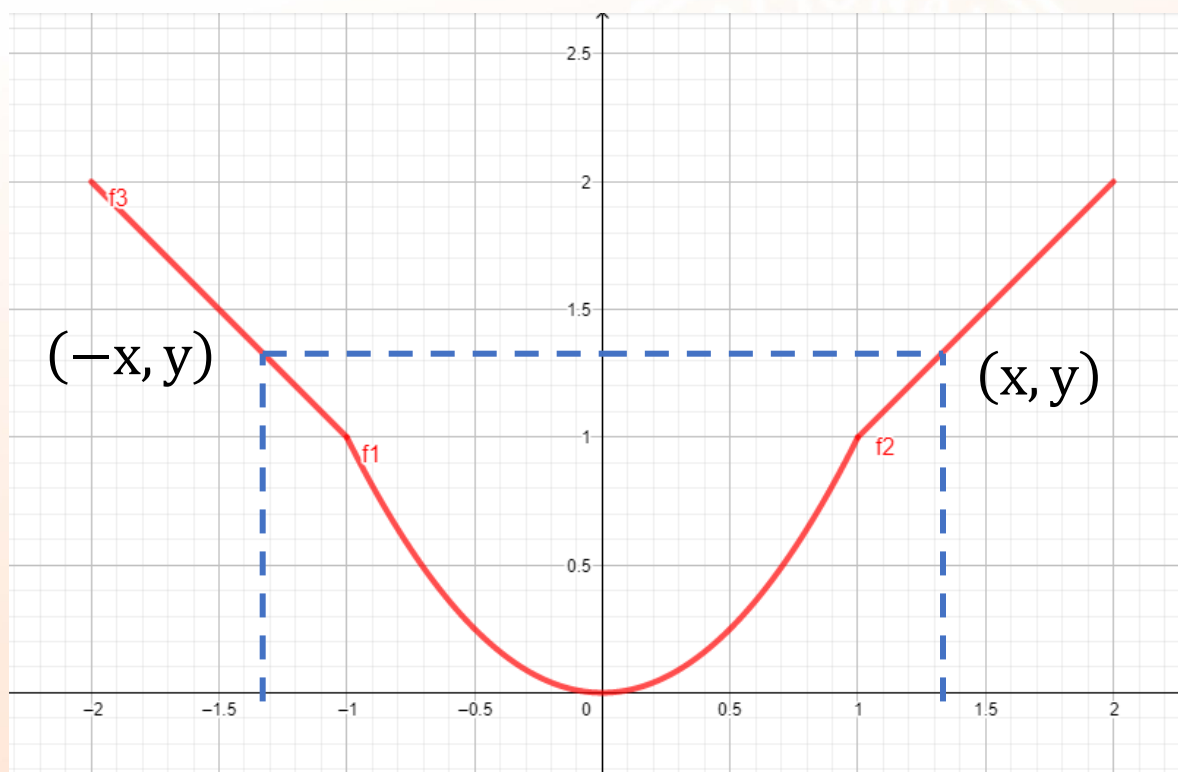
Par cuando $f(-x) = f(x)$, cualquiera que sea $x \in A$.

Impar cuando $f(-x) = -f(x)$, cualquiera que sea $x \in A$.

Observación sobre la función par

Que una función f sea par significa que su gráfica es simétrica respecto del eje Y, esto es

$$(x, y) \in \text{Graf}(f) \leftrightarrow (-x, y) \in \text{Graf}(f)$$

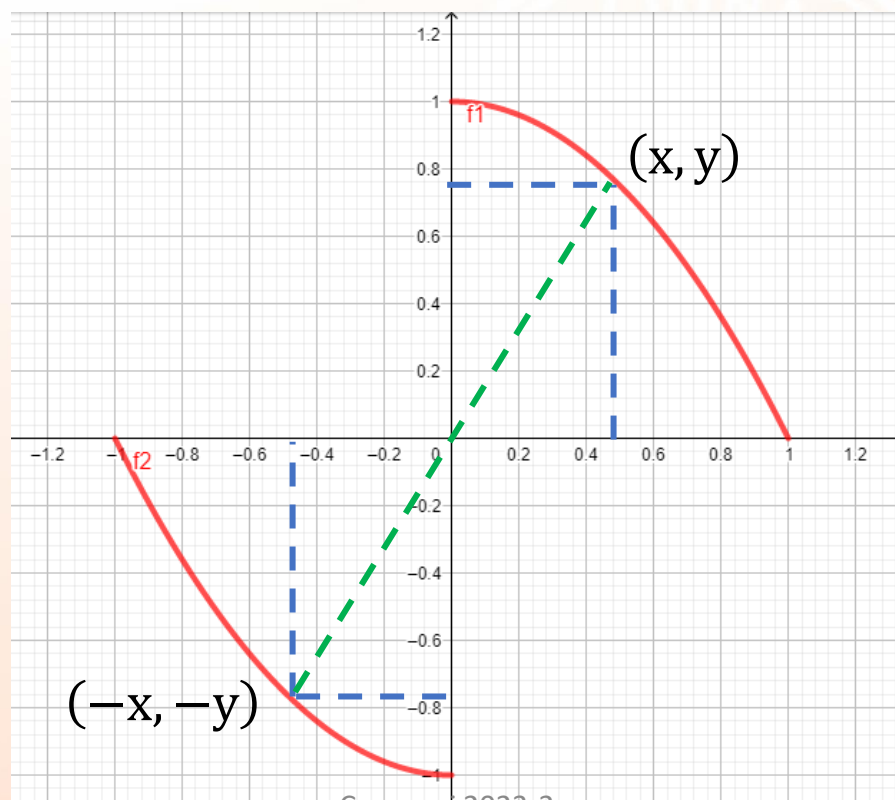


Cepreuni 2023-2

Observación sobre la función impar

Que una función f sea impar significa que su gráfica es simétrica respecto del origen de coordenadas $(0;0)$, esto es

$$(x, y) \in \text{Graf}(f) \leftrightarrow (-x, -y) \in \text{Graf}(f)$$



Cepreuni 2023-2

Ejemplo: La función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $f(x) = x^3 - 2x$ es impar, ya que $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$ es un conjunto simétrico respecto de $x = 0$, y

$$f(-x) = (-x)^3 - 2(-x) = -(x^3 - 2x) = -f(x)$$

Ejemplo: La función $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $g(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 - x + 1}$ es par, ya que $\text{Dom}(g) = \mathbb{R}$ es un conjunto simétrico respecto de $x = 0$, y

$$g(-x) = \sqrt{(-x)^2 + (-x) + 1} + \sqrt{(-x)^2 - (-x) + 1} = \sqrt{x^2 - x + 1} + \sqrt{x^2 + x + 1} = g(x)$$

Ejemplo: La función $h: [-4, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $h(x) = x^2 + x + 1$ no es par ni impar, ya que por ejemplo:

$$h(-1) = 1 \neq 3 = h(1) \text{ y}$$

$$h(-1) = 1 \neq -3 = -h(1)$$

Observación: Existen funciones pares, impares y también funciones que no son pares ni impares.

Problema 234. Determine el valor de verdad de las siguientes afirmaciones:

I. $f(x) = \sqrt{x^2 + \sqrt[3]{1 + |x|}}$ es par

II. Existen funciones que son pares e impares a la vez.

III. La función $f: [-3, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$ es par.

A) FVV

B) FFV

C) VFV

D) VVF

E) VVV

Solución.

I. Verdadero. $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$, el cual es simétrico respecto a $x = 0$. Además

$$f(-x) = \sqrt{(-x)^2 + \sqrt[3]{1 + |-x|}} = \sqrt{x^2 + \sqrt[3]{1 + |x|}} = f(x). \text{ Luego, } f \text{ es par.}$$

II. Verdadero. La función nula con dominio $\mathbb{R}$ es par e impar.

III. Falso. El dominio no es simétrico respecto a $x = 0$. La función no es par.

Propiedades:

Sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto simétrico respecto de $x = 0$, $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}$ funciones. Se cumplen lo siguiente:

1. Si f y g son pares, entonces $f + g$ es una función par.
2. Si f y g son impares, entonces $f + g$ es una función impar.
3. Si f y g son pares, entonces $f \cdot g$ es una función par.
4. Si f y g son impares, entonces $f \cdot g$ es una función par.
5. Si f es par y g es impar, entonces $f \cdot g$ es una función impar.

Propiedad:

Sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto simétrico respecto de $x = 0$, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Entonces f se puede escribir como la suma de una función par y una función impar.

En efecto. Se observa que la $f(x)$ se puede escribir como:

$$f(x) = \frac{1}{2} (f(x) + f(-x)) + \frac{1}{2} (f(x) - f(-x))$$

Definamos las funciones $g, h: A \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por

$$g(x) = \frac{1}{2} (f(x) + f(-x)), \quad h(x) = \frac{1}{2} (f(x) - f(-x))$$

Propiedad:

Como $g(-x) = \frac{1}{2} (f(-x) + f(-(-x))) = \frac{1}{2} (f(-x) + f(x)) = g(x) \rightarrow g$ es par

Como $h(-x) = \frac{1}{2} (f(-x) - f(-(-x))) = \frac{1}{2} (f(-x) - f(x))$
 $= -\frac{1}{2} (f(x) - f(-x)) = -h(x) \rightarrow h$ es impar

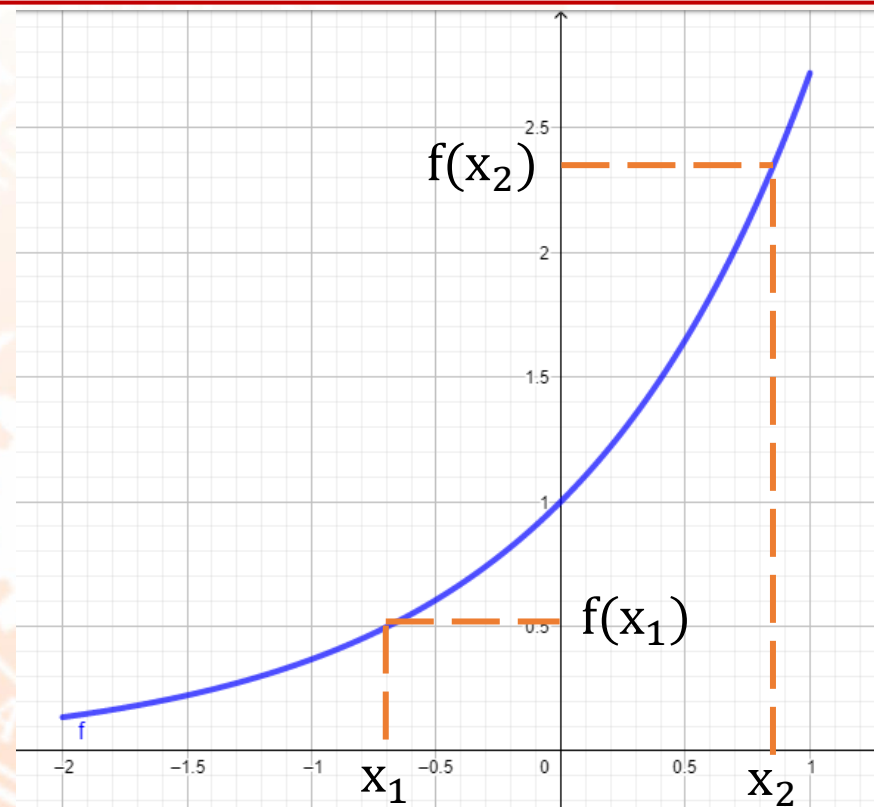
Con lo cual se demuestra la afirmación dada.

FUNCION CRECIENTE

Definición: Una función $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, con $A \subset \mathbb{R}$, se dice **creciente en A** si y solo si

$$\forall x_1, x_2 \in A: x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Esto significa, geométicamente, que las imágenes $f(x)$ se desplazan hacia **arriba** a medida que x avanza hacia la **derecha**.

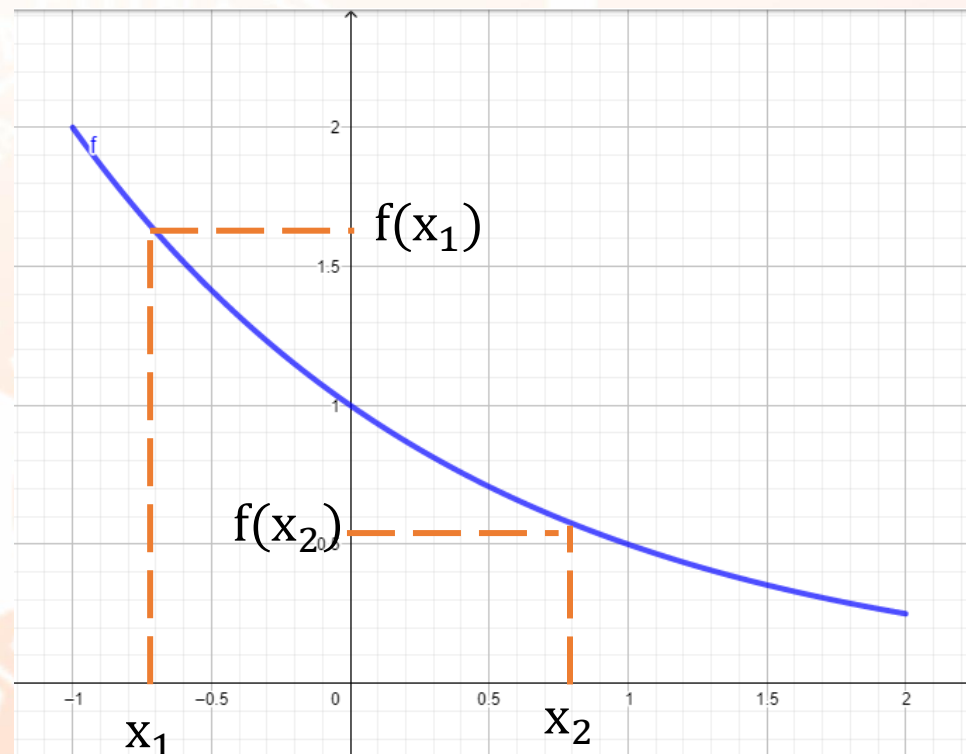


FUNCION DECRECIENTE

Definición: Una función $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$, se dice **decreciente** si y solo si

$$\forall x_1, x_2 \in A: x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Esto significa, geométicamente, que las imágenes $f(x)$ se desplazan hacia **abajo** a medida que x avanza hacia la **derecha**.

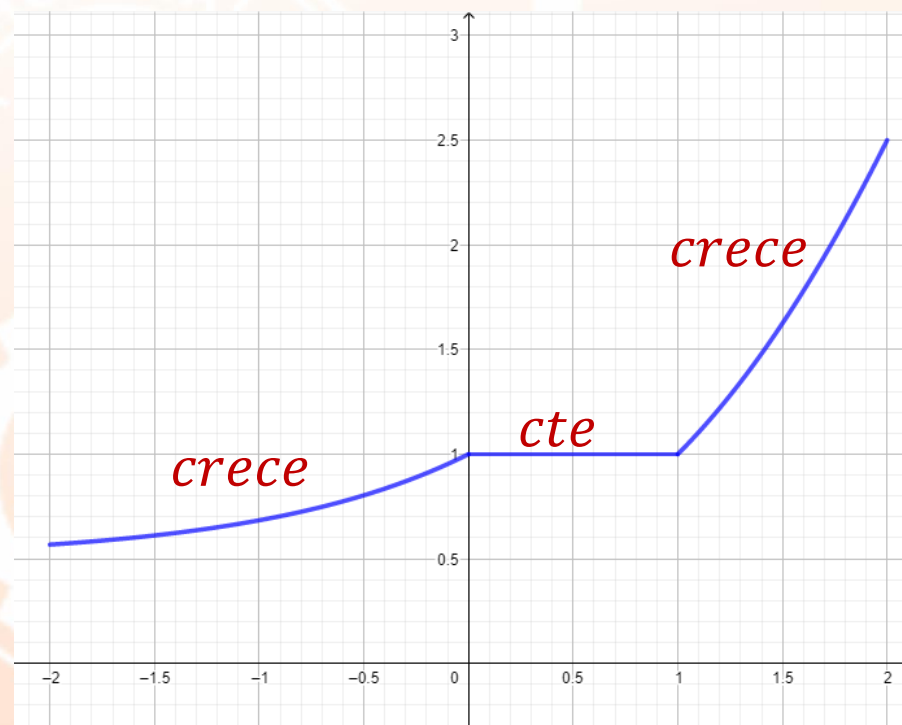


FUNCION NO DECRECIENTE

Definición: Una función $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$, se dice **no decreciente** si y solo si

$$\forall x_1, x_2 \in A: x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

Esto significa, geométricamente, que las imágenes $f(x)$ se mantienen **constantes** o se desplazan hacia **arriba** a medida que x avanza hacia la **derecha**.

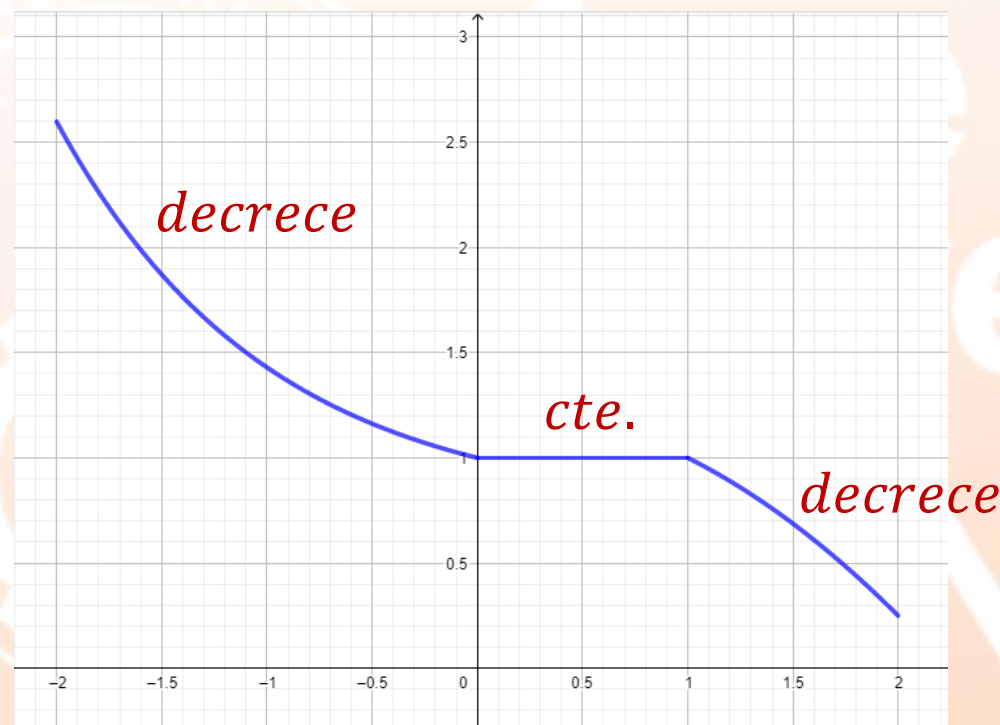


FUNCION NO CRECIENTE

Definición: Una función $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$, se dice **no creciente** si y solo si

$$\forall x_1, x_2 \in A: x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

Esto significa, geométricamente, que las imágenes $f(x)$ se mantienen **constantes** o se desplazan hacia **abajo** a medida que x avanza hacia la **derecha**.



FUNCIONES MONÓTONAS

Una función $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ es **monótona** cuando es creciente o decreciente o no creciente o no decreciente.

Propiedades:

Sea una función $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, con $A \subset \mathbb{R}$.

1. Si f es creciente, entonces f es no decreciente.
2. Si f es decreciente, entonces f es no creciente.
3. La recíproca de las propiedades 1 y 2 no necesariamente se cumplen.

FUNCIÓN INYECTIVA

Definición: Una función $f: A \rightarrow B$ (A, B no vacíos), se dice **inyectiva** cuando dos elementos (diferentes) en el dominio, tienen imágenes diferentes. Simbólicamente

$$\forall x_1, x_2 \in A; x_1 \neq x_2 \rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

O equivalentemente, cuando

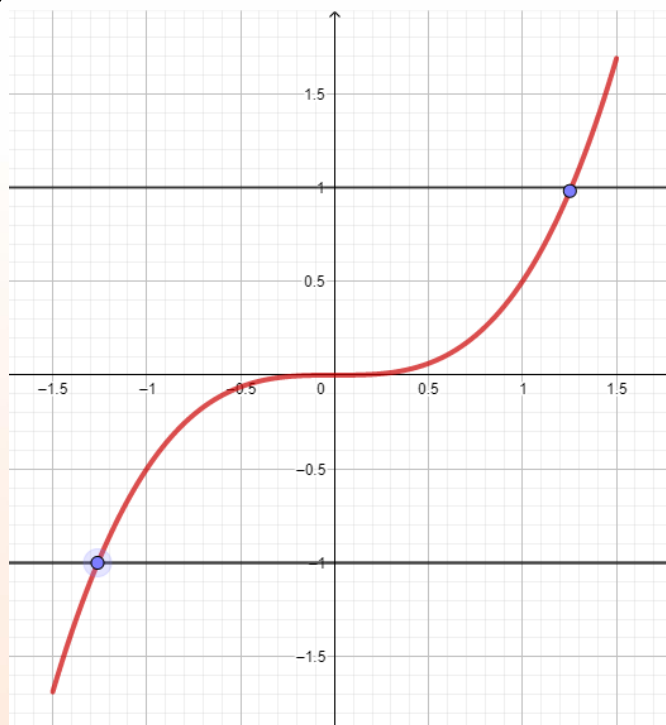
$$\forall x_1, x_2 \in A; f(x_1) = f(x_2) \rightarrow x_1 = x_2$$

No está de más hacer saber que el adjetivo **inyectiva** tiene como **sinónimo** a el vocablo **univalente**, o también **uno a uno**.

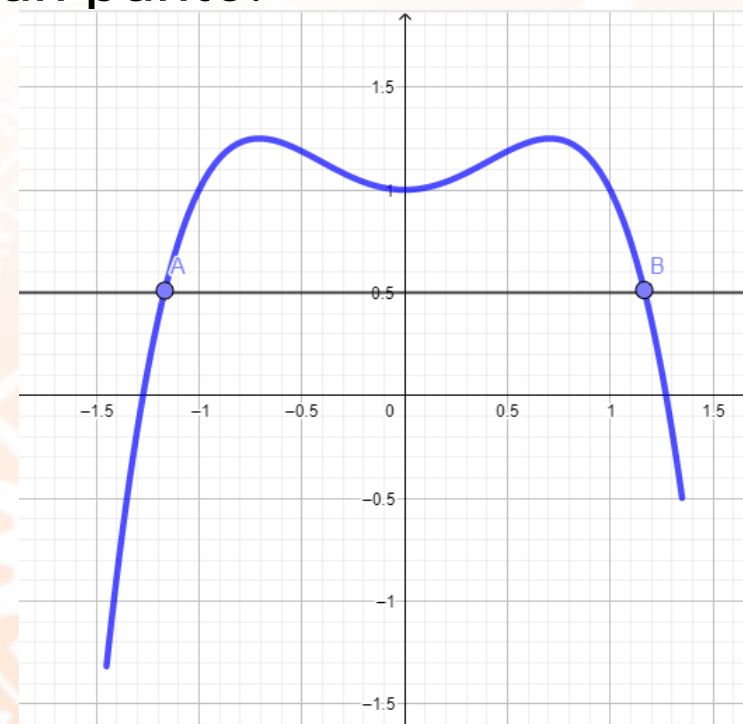
Obs: $p \rightarrow q \equiv \sim q \rightarrow \sim p$

Criterio de univalencia

Una función $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ es **univalente** cuando, y solo cuando, toda recta paralela al eje X, esto es, toda recta de la forma $y = b$, corta a la gráfica de la función a lo más en un punto.



La función es **univalente**



La función no es **univalente**

Propiedades: Sean $A, B \subset \mathbb{R}$, conjuntos no vacíos.

1. Si la función $f: A \rightarrow B$ es creciente o decreciente **entonces**, es inyectiva.
2. Si $k \neq 0$ y la función $f: A \rightarrow B$ es inyectiva, **entonces** $kf: A \rightarrow B$ también es inyectiva.

Obs: Se define la función $(kf)(x) = k \cdot f(x)$

3. Si $f, g: A \rightarrow B$ son inyectivas, no necesariamente $f + g$, $f \cdot g$ son inyectivas.

Ejemplo: La función $f:]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ definida como $f(x) = x^2$ es creciente, y, por ende, inyectiva.

Veamos por qué:

Sean $x_1, x_2 \in]0, +\infty[$, tal que $x_1 < x_2$.

Entonces $0 < x_2 - x_1$, además $x_2 + x_1 > 0$

$$\rightarrow 0 < (x_2 - x_1)(x_2 + x_1)$$

$$\rightarrow 0 < x_2^2 - x_1^2$$

$$\rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Esto muestra que f es creciente.

FUNCIÓN SOBREYECTIVA

Definición: Una función $f: A \rightarrow B$, con A y B no vacíos, se dice **sobreyectiva** si su rango coincide con el conjunto de llegada, esto es, cuando

$$[\text{Rang}(f) \subset B \wedge B \subset \text{Rang}(f)] \leftrightarrow \text{Rang}(f) = B$$

Como la inclusión " $\text{Rang}(f) \subset B$ " es siempre verdadera, entonces: **f es sobreyectiva** $\leftrightarrow B \subset \text{Rang}(f)$

En términos de cuantificadores, esto significa que
 f es sobreyectiva $\leftrightarrow \forall y \in B: \exists x \in A / f(x) = y$

No está de más hacer saber que el adjetivo **sobreyectiva** tiene como **sinónimo** al vocablo **suryectiva**, o también **suprayectiva** o **epiyectiva**.

Propiedades: Sean $A, B \subset \mathbb{R}$, conjuntos no vacíos.

1. Si $k \neq 0$ y la función $f: A \rightarrow B$ es sobreyectiva, **entonces** $kf: A \rightarrow B$ también es sobreyectiva.

Obs: Se define la función $(kf)(x) = k \cdot f(x)$

2. Si $f, g: A \rightarrow B$ son sobreyectivas, entonces $f + g$ no es necesariamente sobreyectiva.

Ejemplo: Las funciones $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $f(x) = x^3$, y $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $g(x) = -x^3$, son sobreyectivas.

Pero la suma de estas dos no lo es, ya que $f + g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ viene definida como con $(f + g)(x) = 0 \rightarrow \text{Ran}(f + g) = \{0\} \neq \mathbb{R}$

FUNCIÓN BIYECTIVA

Definición: Sean $A, B \subset \mathbb{R}$, conjuntos no vacíos. Decimos que una función $f: A \rightarrow B$ es **biyectiva** si esta es, simultáneamente, inyectiva y sobreyectiva.

Observación :

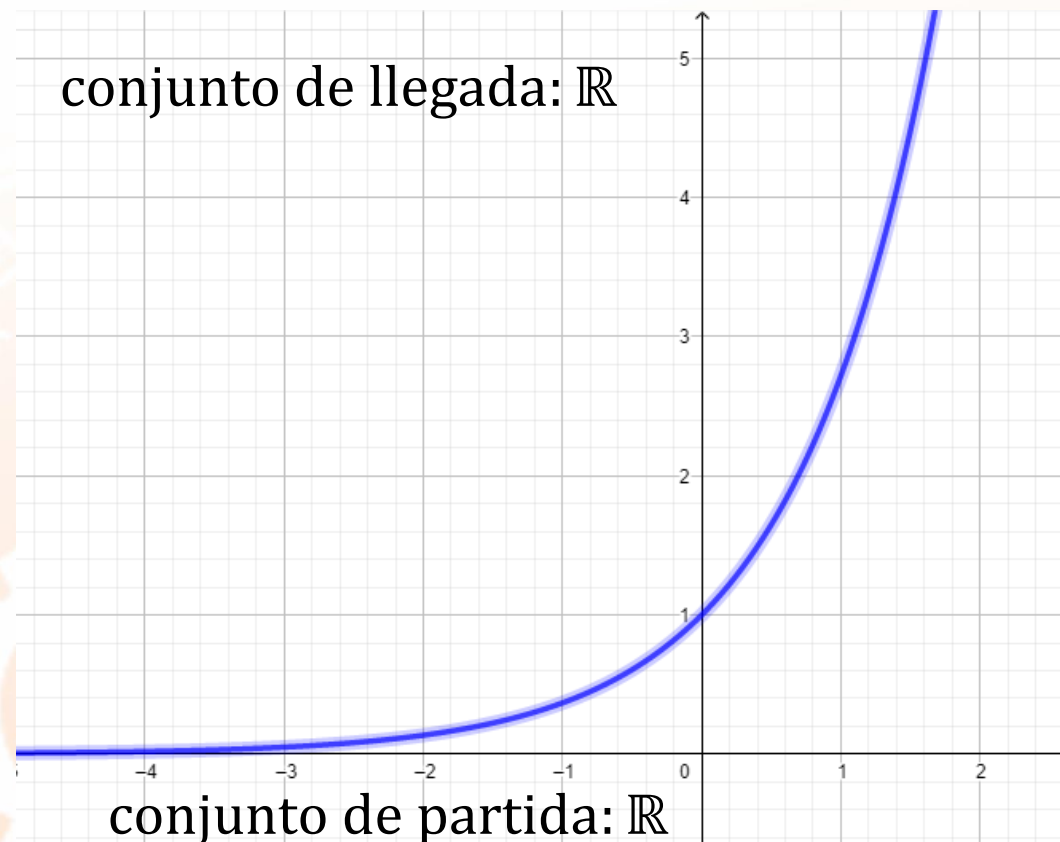
1. $f: A \rightarrow B$ es **biyectiva** $\leftrightarrow$ f es inyectiva y sobreyectiva.
2. $f: A \rightarrow B$ **no** es **biyectiva** $\leftrightarrow$ f no es inyectiva o no es sobreyectiva.

No está de más hacer saber que el adjetivo **biyectiva** tiene como **sinónimo** a el vocablo **biunívoca**.

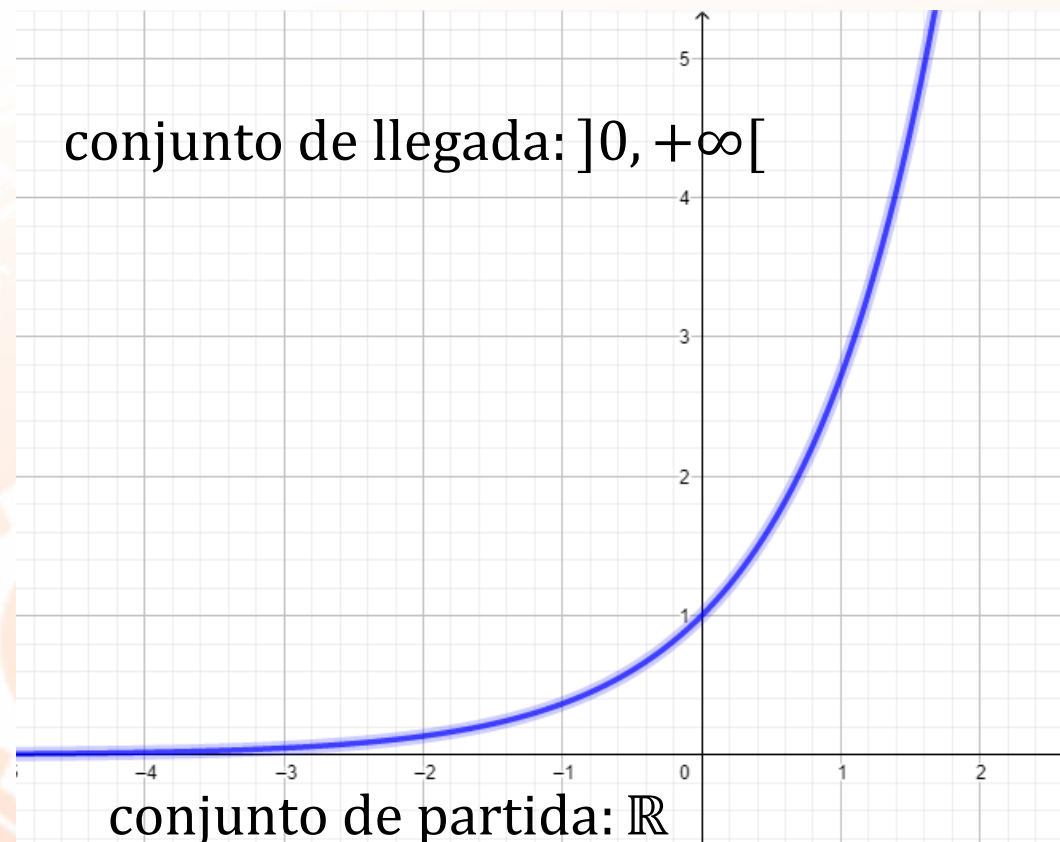
Ejemplo: En la figura se aprecia la gráfica de una función no **biyectiva** $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Si es **inyectiva**, pero su rango, que es $]0, +\infty[$ no es igual al conjunto de llegada, esto es $\text{Ran}(f) \neq \mathbb{R}$, es decir, no es **sobreyectiva**.

Por lo tanto no es **biyectiva**.



No obstante, si restringimos el conjunto llegada a $]0, +\infty[$, entonces $\tilde{f}: \mathbb{R} \rightarrow]0, +\infty[$ esta nueva función sí sería **biyectiva**.



Problema 240. Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} x & , \quad x \in \mathbb{Q} \\ -x & , \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Determine el valor de verdad de cada una de las siguientes proposiciones:

I. f es monótona.

II. f es inyectiva.

III. f es sobreyectiva.

A) VVF

B) FVV

C) FFF

D) VVV

E) VFF

Solución:

I. FALSO. Note que f no es creciente porque $\sqrt{2} = f(-\sqrt{2}) > f(0) = 0$. Por la misma razón, f no es no decreciente. Además f no es decreciente porque $-\sqrt{3} = f(\sqrt{3}) < f(0) = 0$. Por la misma razón, f no es no creciente. Por lo tanto f no es monótona.

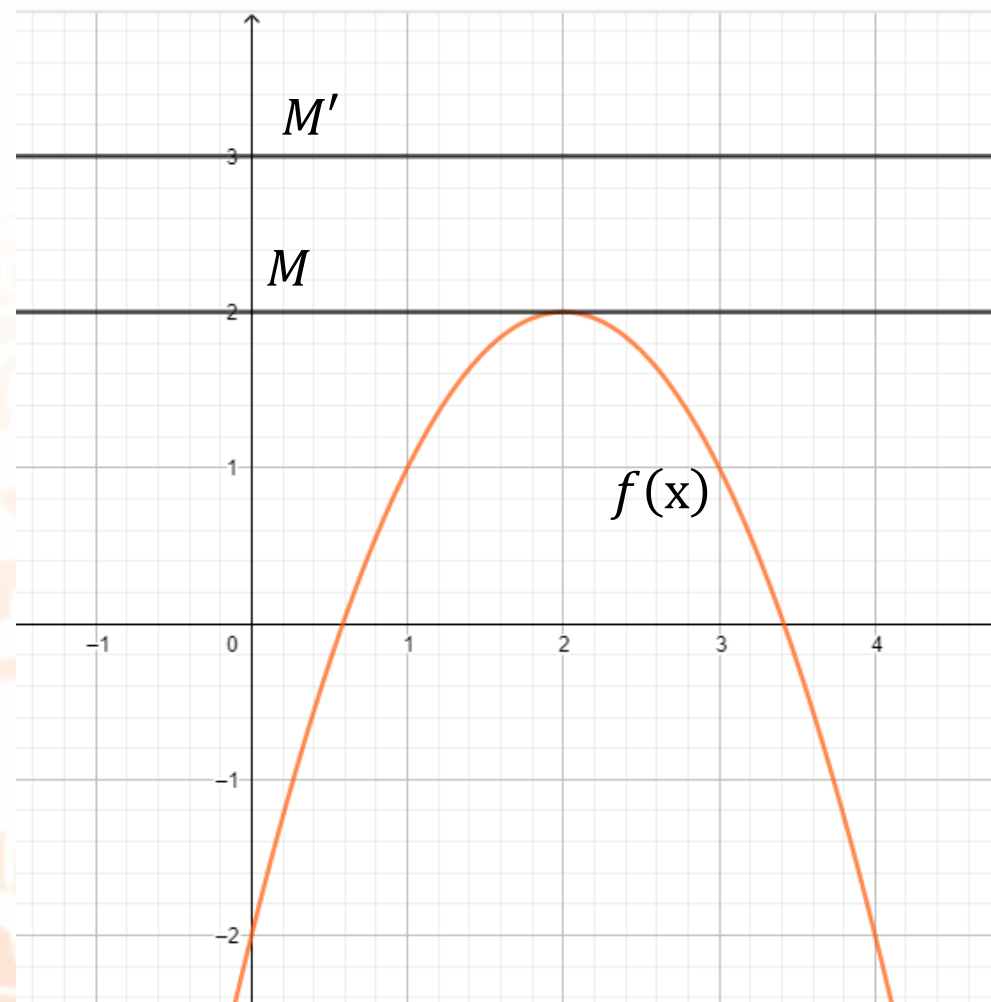
II. VERDADERO. Supongamos $f(a) = f(b)$. Se debe probar que $a = b$. En el caso que $b \in \mathbb{Q}$, se tiene $f(a) = b \in \mathbb{Q}$, luego $a \in \mathbb{Q}$ y así, $a = b$. En el caso que $b \notin \mathbb{Q}$, se tiene $f(a) = -b \notin \mathbb{Q}$, luego $a \notin \mathbb{Q}$ y así, $-a = -b$; es decir $a = b$. La conclusión es que $a = b$. Por lo tanto f es inyectiva.

III. VERDADERO. Sea $y \in \mathbb{R}$. Se debe probar que $y \in \text{Rang}(f)$. En el caso que $y \in \mathbb{Q}$, se tiene $y = f(y) \in \text{Rang}(f)$. En el caso que $y \notin \mathbb{Q}$, se tiene $y = f(-y) \in \text{Rang}(f)$. La conclusión es que $y \in \text{Rang}(f)$. Por lo tanto f es sobreyectiva.

FUNCIÓN ACOTADA SUPERIORMENTE

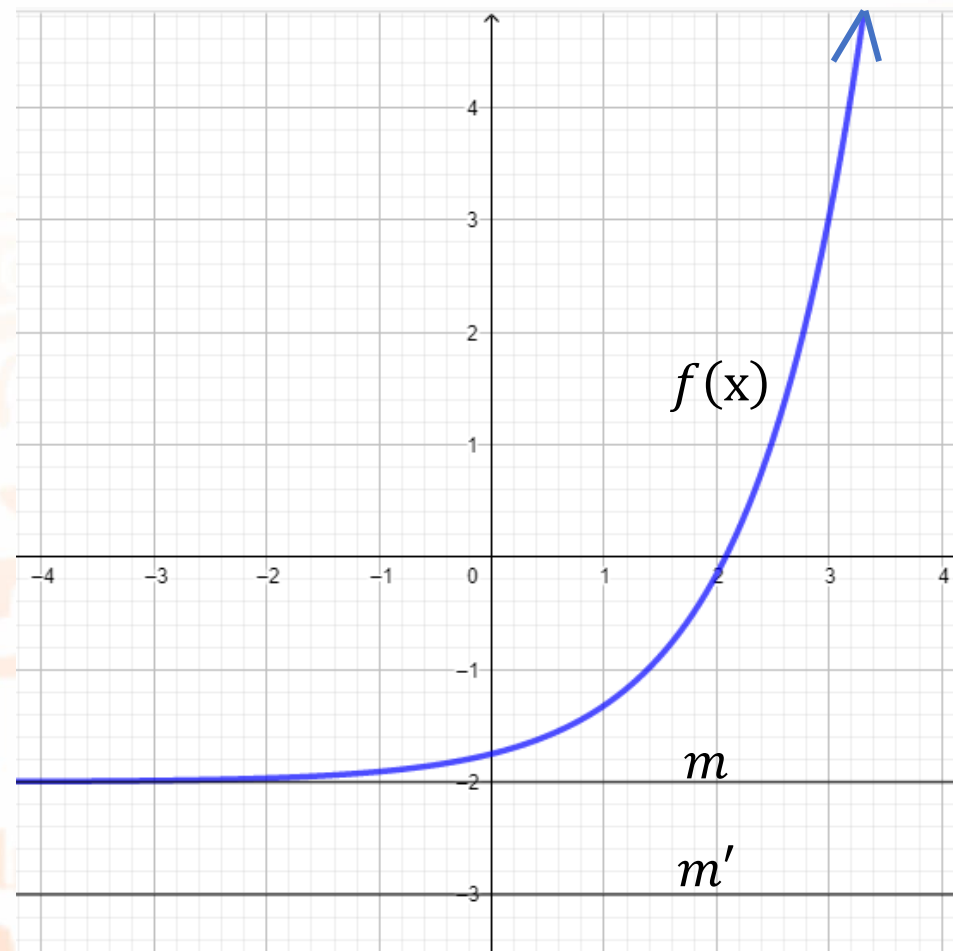
Definición: Una función $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, con $A \subset \mathbb{R}$, se dice **acotada superiormente** si existe un número real M tal que

$$\forall x \in A: f(x) \leq M$$



FUNCIÓN ACOTADA INFERIORMENTE

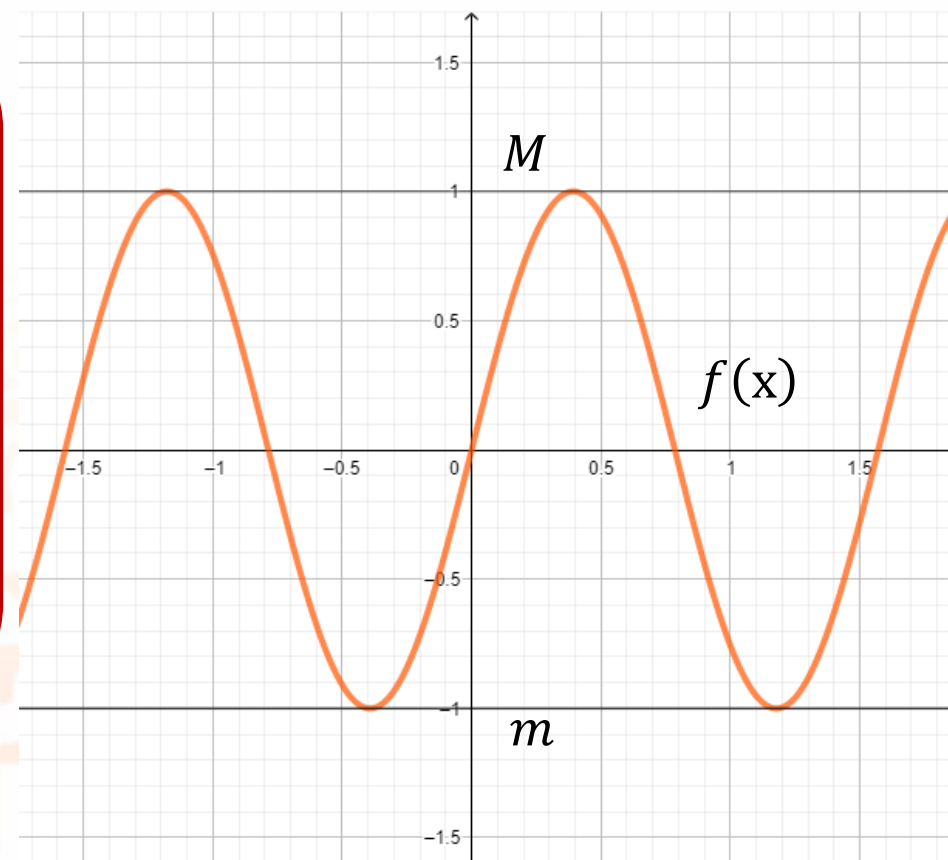
Definición: Una función $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, con $A \subset \mathbb{R}$, se dice **acotada inferiormente** si existe un número real m tal que $\forall x \in A: m \leq f(x)$



FUNCIÓN ACOTADA

Definición: Una función $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, con $A \subset \mathbb{R}$, se dice **acotada** si su rango es un conjunto acotado, esto es, si existen números reales m y M tales que

$$\forall x \in A: m \leq f(x) \leq M$$



Propiedad: Una función $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, con $A \subset \mathbb{R}$, es acotada **si, y solo si**, existe una constante real $c > 0$ tal que $\forall x \in A: |f(x)| \leq c$

Propiedad: La suma, diferencia y producto de funciones acotadas, es acotada.

Demostremos que la función suma es acotada: Por definición existen constantes reales a, b, c y d tales que

$$\forall x \in A: a \leq f(x) \leq b \quad \wedge \quad c \leq g(x) \leq d$$

De esto resulta que todo $x \in A$ es tal que $a + c \leq f(x) + g(x) \leq b + d$. Esto dice que la función suma es acotada.

Demostremos que la función producto es acotada: Por propiedad, existen constantes reales $a > 0$ y $b > 0$, tales que

$$\forall x \in A: |f(x)| \leq a \quad \wedge \quad |g(x)| \leq b$$

De esto resulta que todo $x \in A$ es tal que $|f(x)g(x)| \leq ab$. Esto dice que la función producto es acotada.

Ejemplo: La función $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $f(x) = ax^n$, donde $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $a \in \mathbb{R}$ es una constante arbitraria es una función acotada. En efecto:

Existe $c = \max\{|a|, |b|\} + 1 > 0 / \forall x \in [a, b]: |x| \leq c$

Luego, $\forall x \in [a, b]: |x|^n \leq c^n \equiv \forall x \in [a, b]: |x^n| \leq c^n$

De esto resulta que $\forall x \in [a, b]: |f(x)| = |ax^n| = |a||x^n| \leq |a|c^n$

Esto dice que f es acotada.

Ejemplo: Son funciones acotadas las funciones polinómicas definidas en intervalos cerrados, esto es las funciones del tipo $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definidas como

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Esto se sigue del ejemplo anterior, ya que esta función es una suma (de una cantidad finita) de funciones acotadas.

Ejemplo. Sea la función $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$

$$f(n) = \begin{cases} \frac{1-n}{2} & , \quad n \text{ es impar} \\ \frac{n}{2} & , \quad n \text{ es par} \end{cases}$$

Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. f es inyectiva.

II. f no es sobreyectiva.

III. f es monótona.

IV. f es acotada.

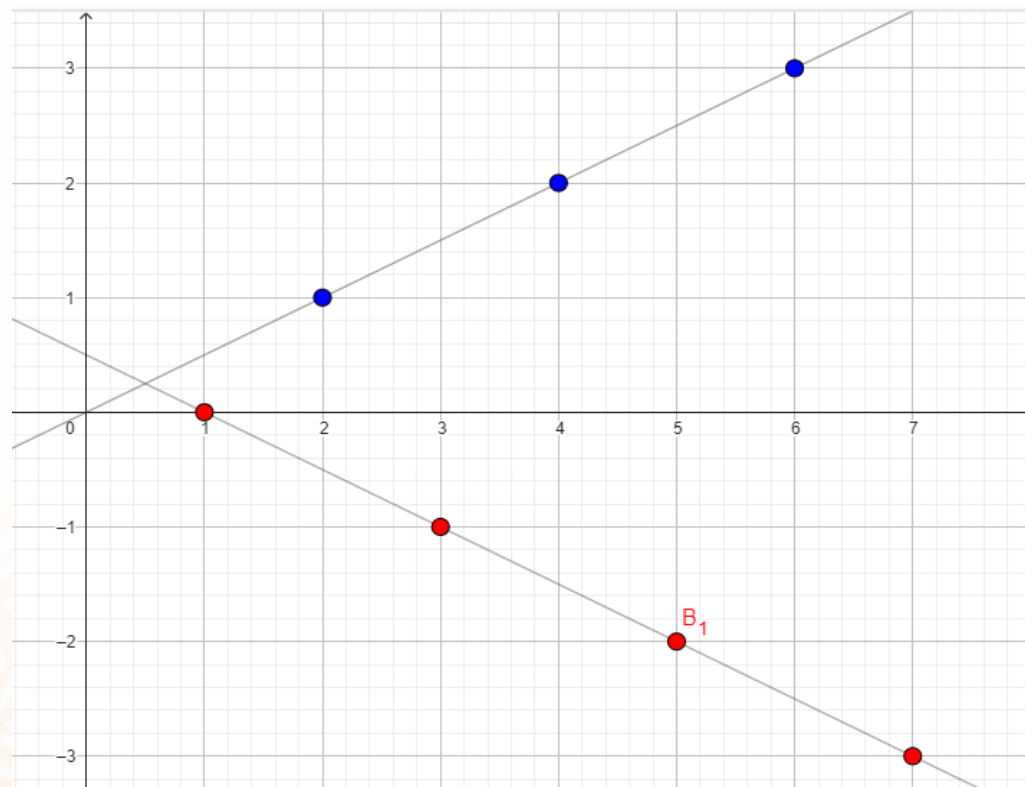
A) VFVF

B) VFFF

C) FVFF

D) VFVV

E) FFFF



Solución:

I. Verdadero. f es inyectiva.

II. Falso. Como $\text{Ran}(f) = \mathbb{Z} \rightarrow f$ es sobreyectiva.

III. Falso. f no es monótona.

IV. Falso. f no es acotada.